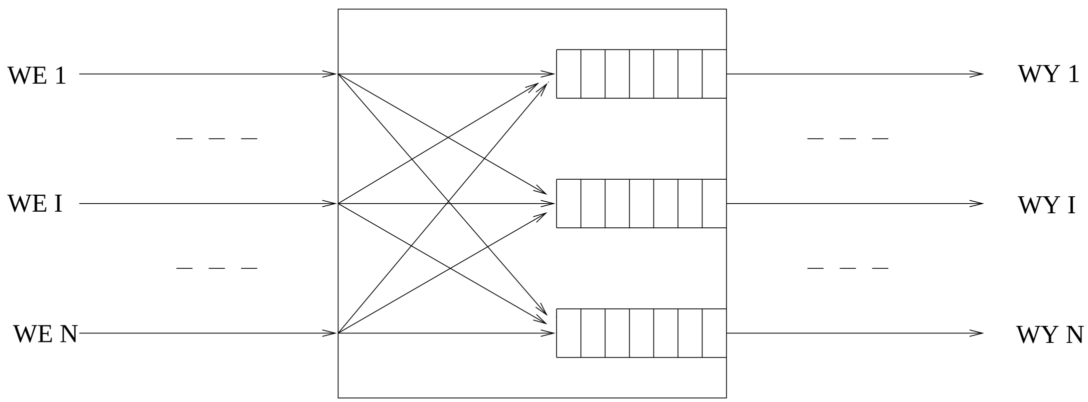
Analityczne modele kolejkowe w ocenie efektywności pracy systemów i sieci komputerowych

Tadeusz Czachórski

IITiS PAN Gliwice

Model kolejkowy przełącznika sieciowego



strumienie wejściowe, regulaminy kolejek, rozkład wielkości pakietów (czasu wysłania) → rozkład długości kolejek, czasu czekania, prawdopodobieństwo utraty pakietu (jakość usług)

Modelowanie, ocena efektywności – narzędzia

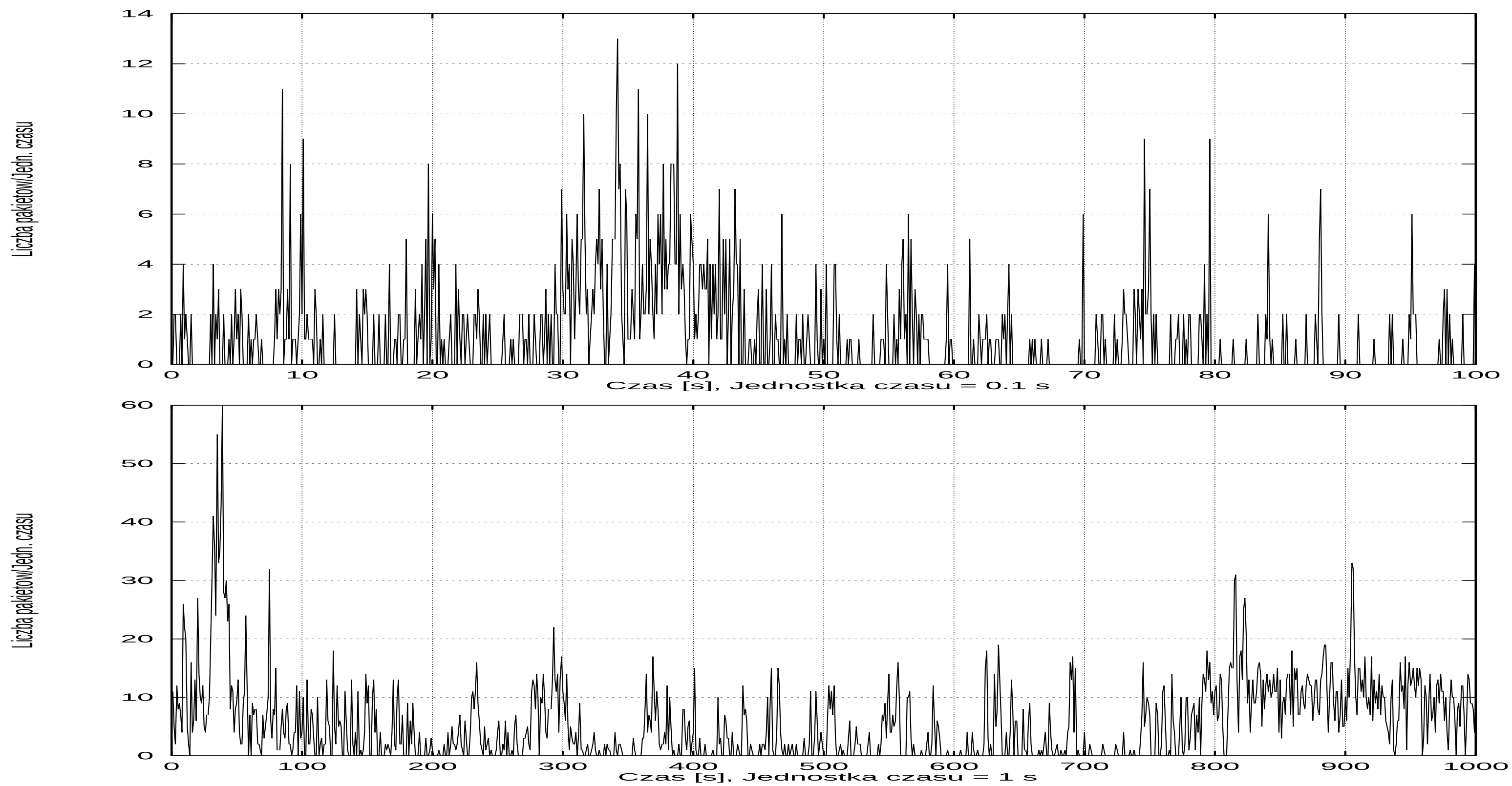
- Metody analityczne i numeryczne teorii kolejek
  - Łańcuchy Markowa
  - aproksymacja dyfuzyjna

Literatura: Performance Evaluation (North Holland), IEEE J. on Communications, Polish Teletraffic Symposium, ...

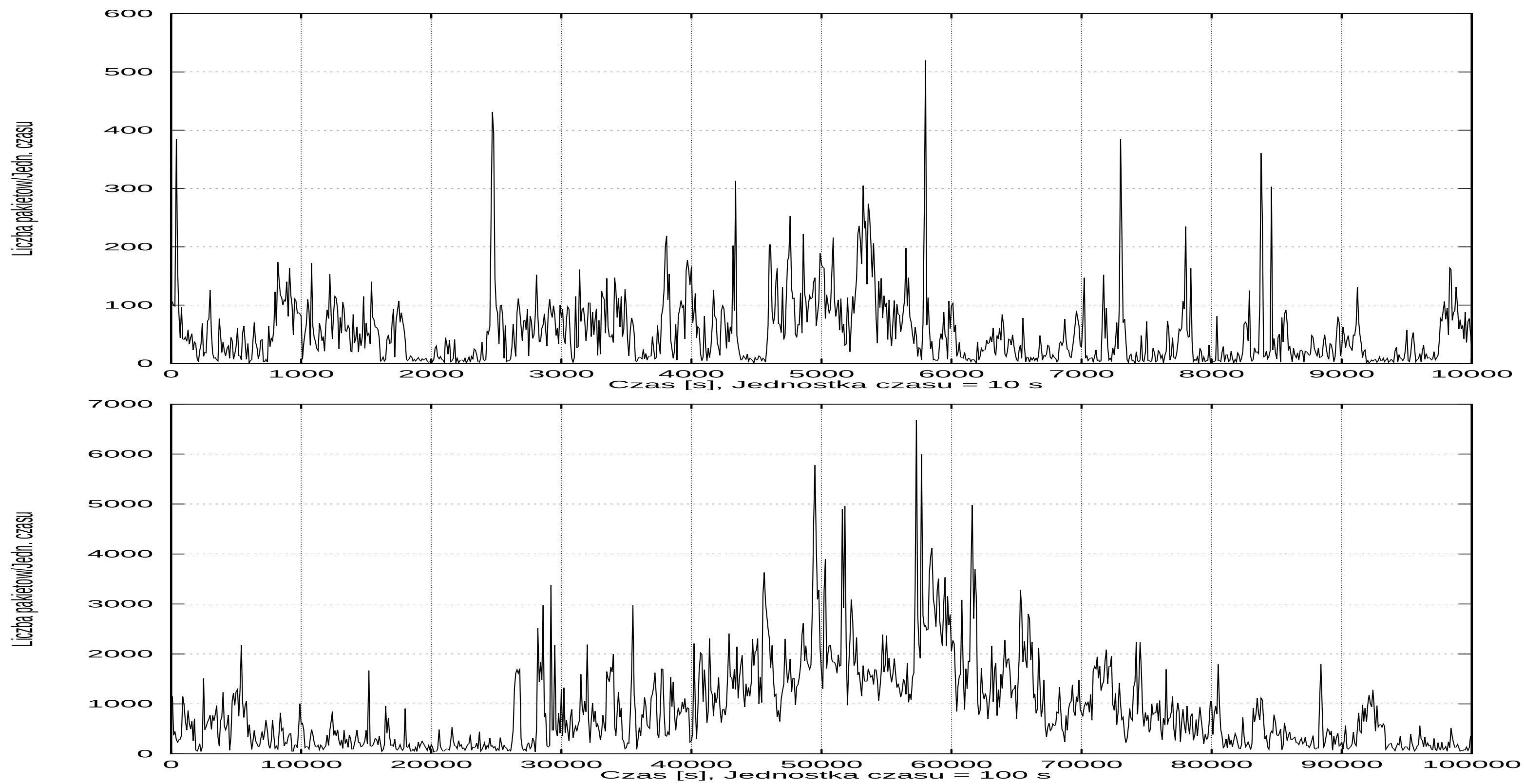
Symulacja – pakiety, np. QNAP (Queueing Network Analysis Package), OMNET++, NS (Network Simulator), Optical WDM Network Simulator

Problem: zdarzenia rzadkie, prawdopodobieństwo np. 10^{-8}

Samopodobieństwo – test wizualny (pomiary w Bellcore)



Test wizualny (na podst. pomiarów w Bellcore)



Definicja samopodobieństwa procesu stochastycznego z ciągłym czasem:

Proces stochastyczny $X(t)$ jest statystycznie samopodobny z parametrem samopodobieństwa H, jeżeli dla dowolnego $g > 0$ przeskalowany proces $X(gt)/g^H$ ma te same statystyczne własności, co proces $X(t)$.

W szczególności:

$$E[X(t)] = \frac{E[X(gt)]}{g^H}$$

$$Var[X(t)] = \frac{Var[X(gt)]}{g^{2H}}$$

$$R_x(t,s) = \frac{R_x(gt,gs)}{g^{2H}}, \text{ gdzie } R_x(t,s) = E[X(t)X(s)]$$

Samopodobieństwo procesu stochastycznego z dyskretnym czasem:

Ciąg $X_1, X_2, \ldots X_k, \ldots$ jest statystycznie samopodobny, jeżeli dla ciągu zagregowanego

$$X_k^{(m)} = \frac{1}{m}(X_{km-m+1} + ... + X_{km}), \text{ gdzie } m > 1$$

zachodzi

$$Var[X^{(m)}] = \frac{Var[X]}{m^{\beta}}, \text{ gdzie } 0 < \beta < 1, \; H = 1 - \beta/2$$

$$R_{X^{(m)}}(k) = R_X(k).$$

Cechy procesu o długoterminowych zależnościach (samopodobnego)

- wariancja procesu zagregowanego $X_k^{(m)}$ przyjmuje dla dużych wartości m następującą postać: $Var[X]m^{-\beta}$, $0 < \beta < 1$,
- $\sum_{k=-\infty}^{\infty} Cov(k)$ jest rozbieżna,
- widmo $S(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} R(k)e^{-j\omega k}$ jest dla $\omega = 0$ nieskończone.

Cechy procesu o krótkoterminowych zależnościach

- wariancja procesu zagregowanego $X_k^{(m)}$ przyjmuje dla dużych wartości m następującą postać: $\frac{Var[X]}{m}$
- $\sum_{k=-\infty}^{\infty} Cov(k)$ jest zbieżna
- widmo $S(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} R(k)e^{-j\omega k}$ jest dla $\omega = 0$ skończone.

Łańcuchy Markowa

- Łańcuch – proces losowy o dyskretnej przestrzeni stanów
- Proces Markowa – proces losowy bez pamięci

Niech łańcuch Markowa $X(t)$ z ciągłym czasem przyjmuje wartości ze zbioru $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.

Jeżeli $X(t) = x_i$, mówimy, że łańcuch jest w stanie i.

Łańcuchy Markowa, c.d.

Oznaczmy:

$$P_i(t) = P[X(t) = x_i]$$

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_j P_j(t) q_{ji}$$

lub w zapisie macierzowym

$$\frac{d\,\boldsymbol{P}(t)}{dt} = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{P}(t)\ .$$

$\boldsymbol{P}$ jest wektorem stanów, a $\boldsymbol{Q}$ to macierz tranzycji (macierz intensywności, macierz współczynników przejścia).

Łańcuchy Markowa, c.d.

W stanie ustalonym, gdy prawdopodobieństwa stanów nie zależą od czasu, $\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{P}$, układ równań przechodzi w

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{P} \ .$$

Rozwiązanie (numeryczne) daje prawdopodobieństwa wszystkich stanów systemu.

Problem: miliony stanów (układy milionów równań algebraicznych lub różniczkowych)

Aproksymacja dyfuzyjna

Proces $N(t)$ reprezentujący liczbę zadań w systemie jest przybliżony wartością procesu dyfuzji $X(t)$.

Rozwiązanie równania dyfuzji

$$\frac{\partial f(x,t;x_0)}{\partial t} = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 f(x,t;x_0)}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial f(x,t;x_0)}{\partial x} \ ,$$

w którym współczynniki α, β reprezentują własności strumienia nadchodzących zadań (np. pakietów), ich rozmiar, czas przesłania, algorytmy kontrolne –

– daje funkcję gęstości $f(x,t;x_0)$ procesu dyfuzji

$$f(x,t;x_0)dx = P[x \le X(t) < x + dx \mid X(0) = x_0]$$

Aproksymacja dyfuzyjna, c.d.

która aproksymuje rozkład prawdopodobieństwa liczby zadań (pakietów) obecnych w systemie

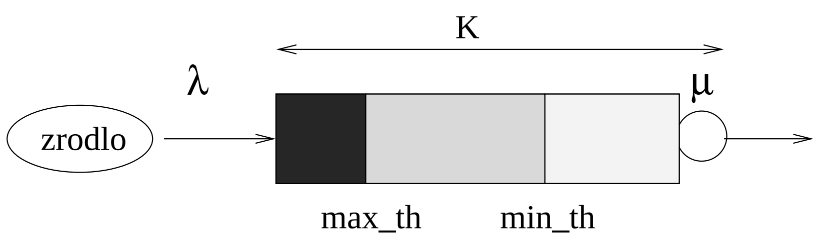
$$p(n, t; n_0) \approx f(n, t; n_0),$$

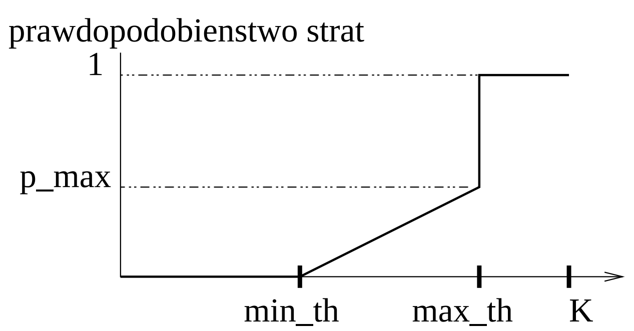
a w stanie ustalonym $p(n) \approx f(n)$.

W tekście artykułu przykłady zastosowania obu metod do analizy przełącznika sieciowego i serwera WWW.

Metody rozwiązywania równania dyfuzji przy niestandardowych warunkach brzegowych i parametrach $\alpha(x, t)$, $\beta(x, t)$.

Kolejka z algorytmem RED





RED, zasady

Średnia krocząca avg długości kolejki obliczana w momencie nadejścia nowego pakietu:

$$avg = \begin{cases} (1-w) * avg \ + \ w * n & \text{jeżeli kolejka nie jest pusta} \\ (1-w)^{\frac{\mu}{\lambda}} * avg & \text{jeżeli kolejka jest pusta,} \end{cases}$$

gdzie w jest parametrem, a n jest bieżącym rozmiarem kolejki liczonym w pakietach.

RED, zasady

Dwa progi: min_{th} i min_{th}, prawdopodobieństwo p_d odrzucenia pakietu

$$p_d(avg) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli} \quad avg \ \leq \ min_{th} \\ \dfrac{avg - min_{th}}{max_{th} - min_{th}} * p_{max} & \text{jeżeli} \quad min_{th} < avg \leq max_{th} \\ 1 & \text{jeżeli} \ \ max_{th} < avg \end{cases}$$

Kolejka RED – Łańcuch Markowa

Łańcuch $X(t)$ o stanach zdefiniowanych przez wektor
$V = (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$,
gdzie n_1 – liczba pakietów w kolejce,
n_2 – całkowita część $\lfloor avg \rfloor$ średniej kroczącej,
n_i $(\forall i \in \{3, 4, 5, 6\})$ przybliżają wartość ułamkową avg

Nadejście nowego pakietu – tranzycja

$$(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6) \rightarrow (n_1 + 1, n_2^*, n_3^*, n_4^*, n_5^*, n_6^*)$$

z intensywnością $\lambda * [1 - p_d(avg)]$. Obliczana jest nowa wartość avg i jej przybliżenie jest zapisane w elementach $n_2^*, \ldots, n_6^*$.

Wysłanie pakietu – przejście

$$(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)) \rightarrow (n_1 - 1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$$

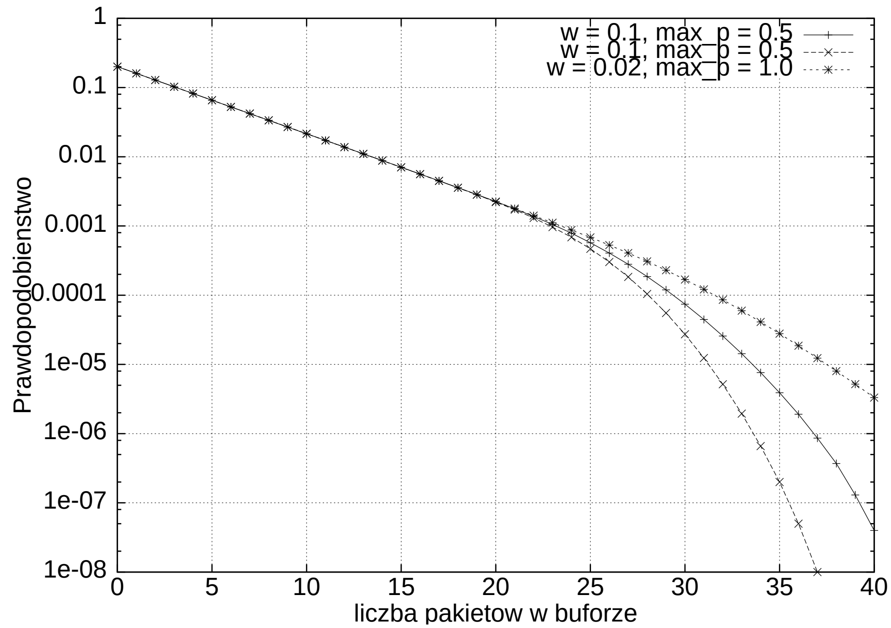
Kolejka RED – Łańcuch Markowa, c.d.

Samopodobne strumienie – kombinacja kilku źródeł poissonowskich,

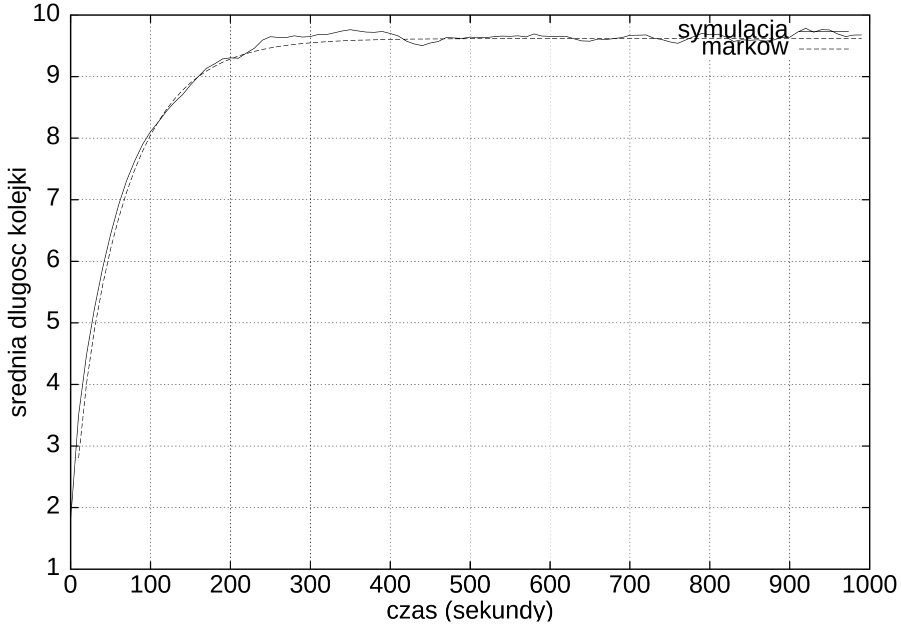
złożone, niewykładnicze rozkłady rozmiaru pakietów – kombinacja faz o rozkładzie wykładniczym.

Efekt – dodatkowe zmienne w wektorze stanów, zwiększenie liczby stanów.

Rozkład długości kolejki RED dla różnych watoći parametrów w i max_p



Średnia długość kolejki RED jako funkcja czasu



Model dyfuzyjny kolejki RED

W modelu dyfuzyjnym nie można określić momentów nadejścia nowych pakietów. Stan kolejki jest rozpatrywany w stałych czasu $\Delta t = 1/\lambda$ (średni odstępo między nadchodzącymi pakietami).

Natężenie λ pozostaje stałe w tym okresie czasu, gdy zmienia się, to również zmienia się długość przedziału $1/\lambda$, po którym modyfikujemy wartość avg.

Na początku przedziału i model oblicza średnią wartość długości kolejki $E[N_i] = 1 + \sum_{n=1}^{N} p_i(n)n$ i ważoną średnią avg

$$avg_i = (1-w)avg_{i-1}p_i(0) + [1 - p_i(0)]\,[(1-w)avg_{i-1} + wE[N_i]]$$

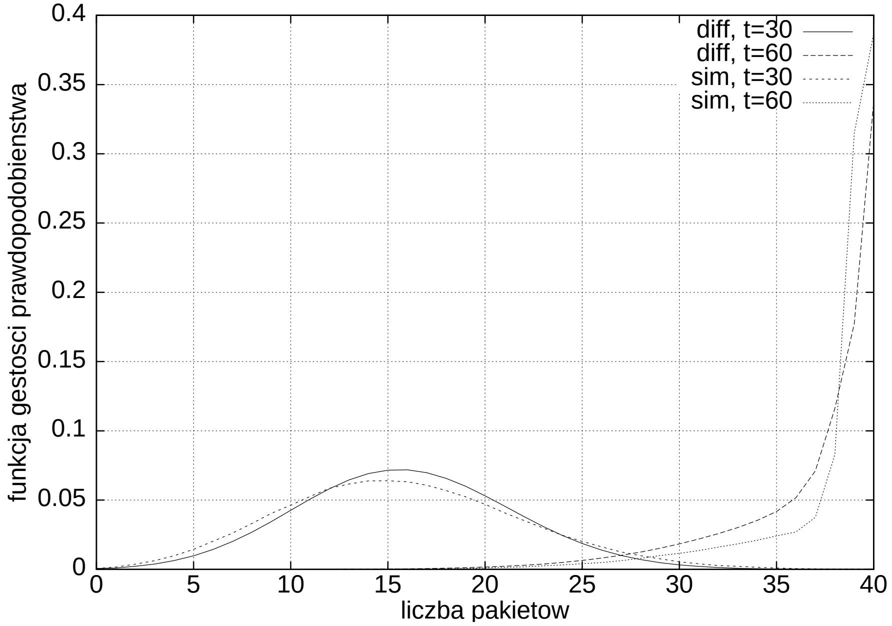
Model dyfuzyjny kolejki RED, c.d.

a następnie określa używając funkcji $d(avg)$ prawdopodobieństwo zaznaczenia pakietu jako nadmiarowego i wynikłe stąd zmiany natężenia strumienia wejściowego:

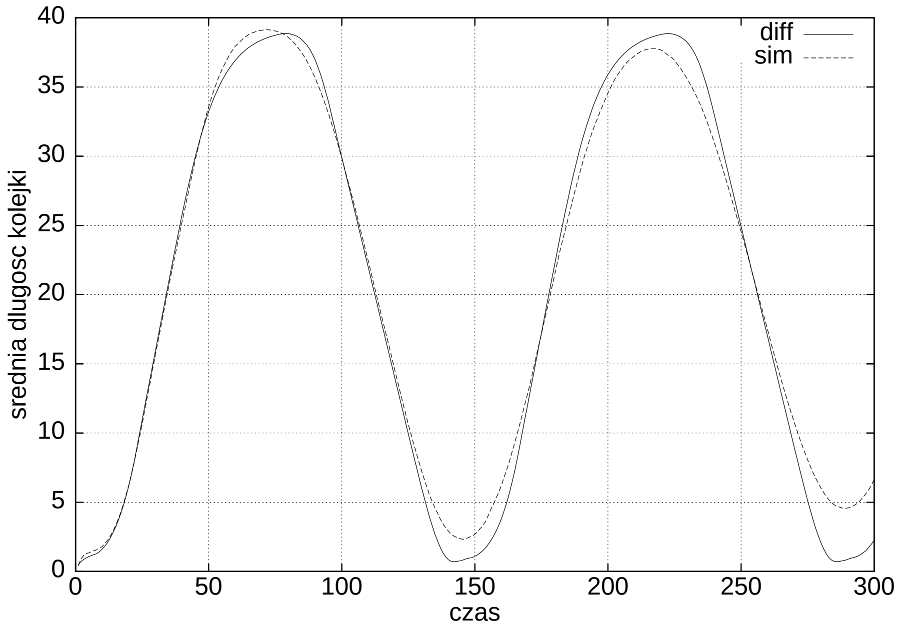
$$\lambda_{new} = [1 - d(avg)]\,(\lambda_{old} + \Delta\lambda) + d(avg)\lambda_{old}/a$$

Modyfikacja strumienia natępuje w przypadku, gdy od ostatnich zmian upłynął przedział milczenia. Zwiększenie strumienia ma charakter addytywny, o $\Delta\lambda$, a zmniejszanie strumienia ma charkter multiplikatywny, ze współczynnikiem $1/a$. Nowe natężenie λ_{new} nadejdzie do kolejki po czasie $T + E[N_i] \cdot 1/\mu$.

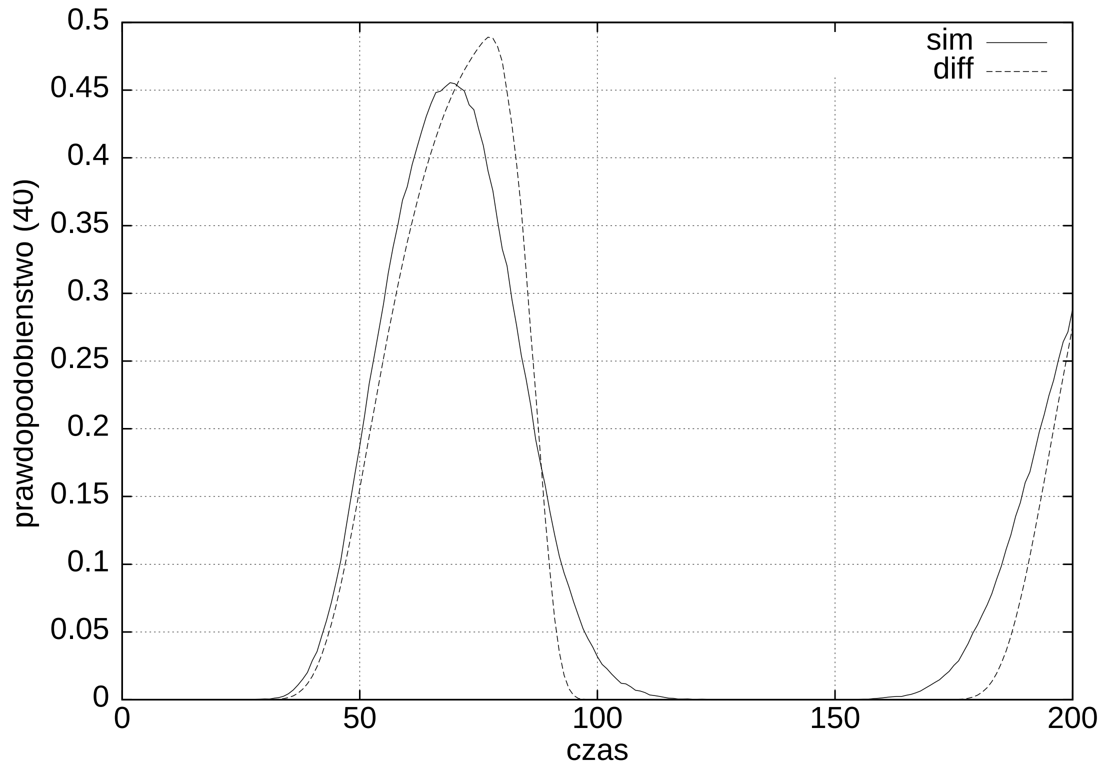
Rozkład długości kolejki dla dwu chwil czasowych – aproksymacja dyfuzyjna i symulacja



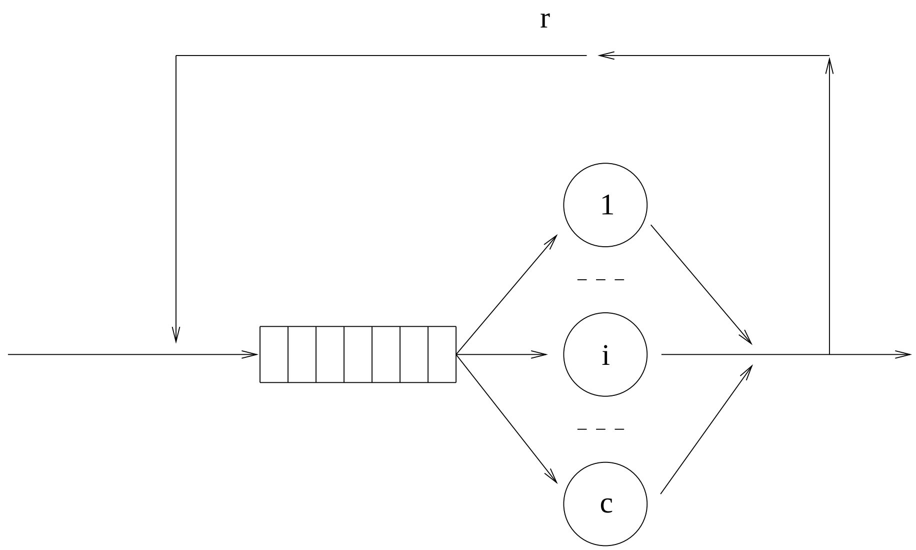
Średnia długość kolejki RED w funkcji czasu, aproksymacja dyfuzyjna i symulacja



Prawdopodobieństwo strat w kolejce RED, wyniki symulacji i aproksymacji dyfuzyjnej



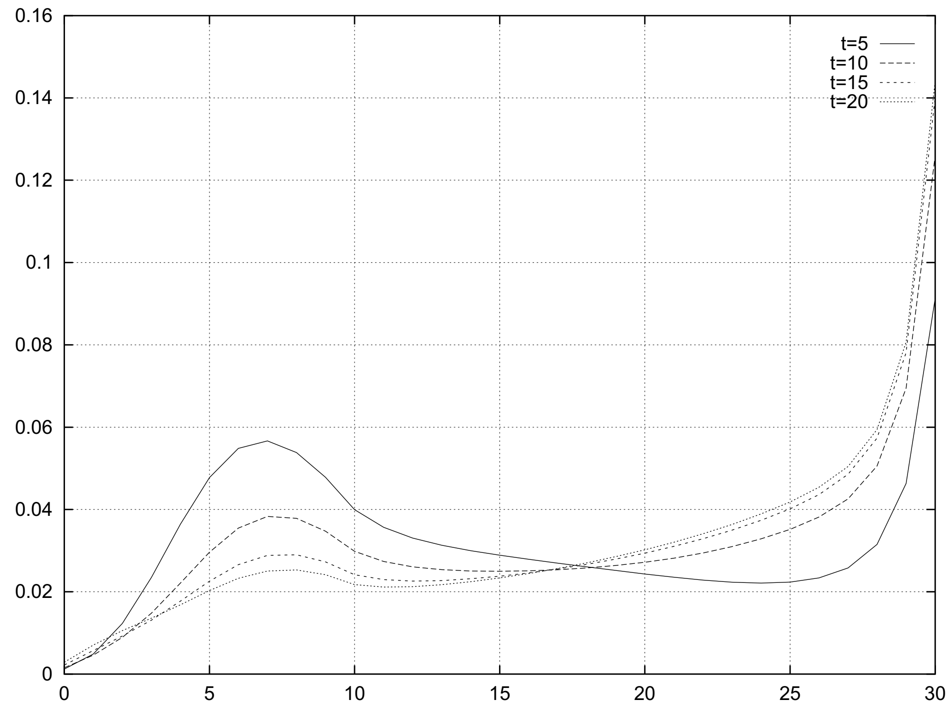
Kolejkowy model serwera WWW



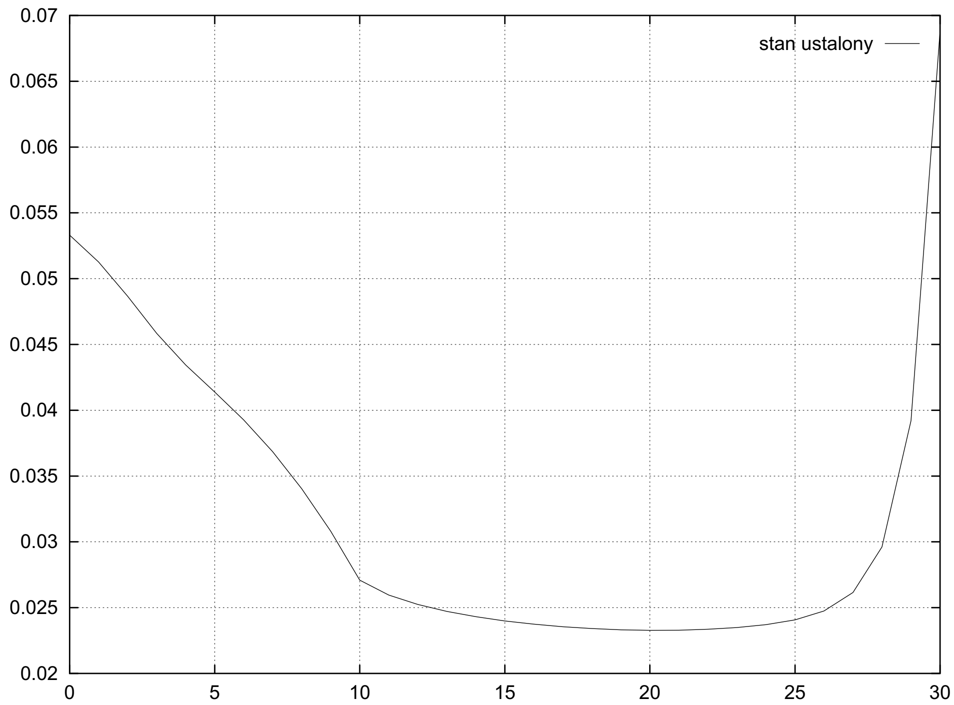
Na poziomie sesji:

k – MaxClients,   r – KeepAliveTimeout

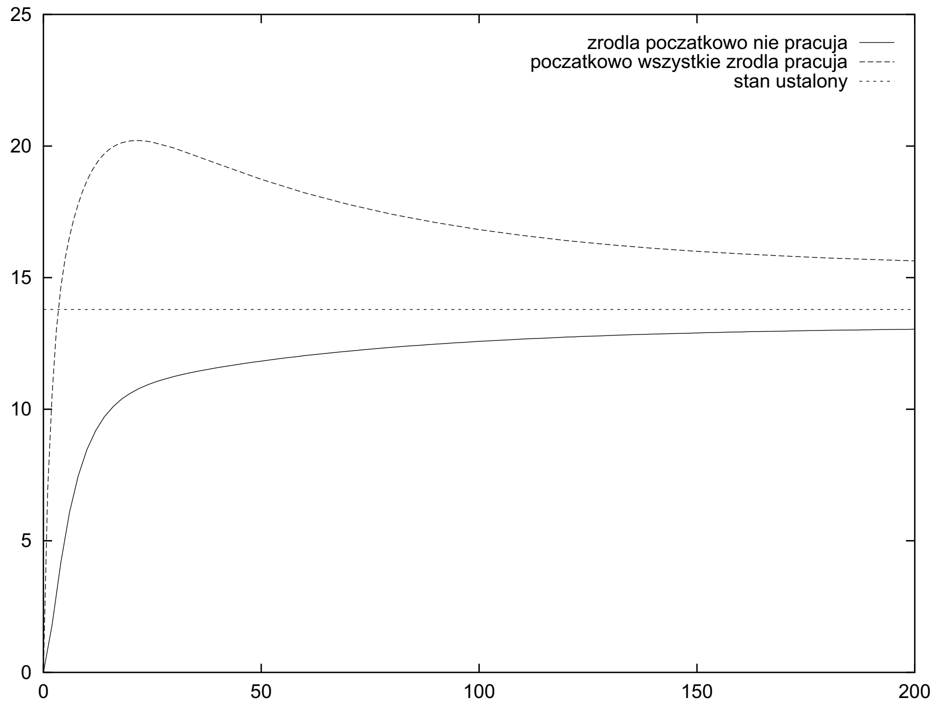
Rozkład liczby połączeń w różnych chwilach czasowych



Rozkład liczby połączeń w stanie ustalonym



Średnia liczba połączeń w funkcji czasu dla różnych warunków początkowych



Przebieg średniej liczby połączeń w serwerze WWW, wyniki aproksymacji dyfuzyjnej